$x = 3^4$ ise x in değerini bulalım:

$x = 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

olur. Burada 3 sayısına taban, 4 sayısına üs, 3^4 ifadesine üslü ifade ve 81 sayısına üslü ifadenin değeri denir.

Üslü sayıları BEST Matematik TYT'de işledik.

Tabanı ve değeri belli iken üssü (kuvveti) bulma işlemini, Logaritma ile ele alacağız. **Örneğin, $3^x = 5$ ise x değerini bulma işlemini logaritma ile yapacağız.**

Üstel Fonksiyonların Grafiği

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$

biçiminde tanımlanan üstel fonksiyonun grafiğini çizmek için, aşağıdaki maddeler sırası ile uygulanır.

1. Uygun aralıkta bazı x reel sayıları seçilerek, (x, a^x) ikilileri ile tablo oluşturulur.
2. Oluşturulan ikililerin belirttiği noktalar koordinat düzleminde işaretlenir.
3. İşaretlenen noktalar birleştirilerek f(x) in grafiği çizilmiş olur.

Örnek .. 1

$\mathbb{R}$ de tanımlı,

$f(x) = 2^x$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

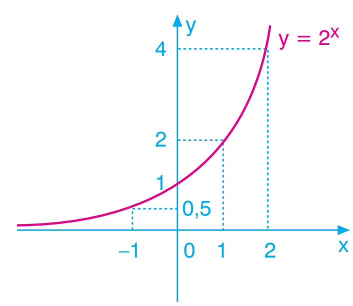
1. Uygun aralıkta bazı x reel sayıları seçilerek, (x, a^x) ikilileri ile tablo oluşturulur.

x	...	↗	–1	↗	0	↗	1	↗	2	...
$y = 2^x$	...	↗	0,5	↗	1	↗	2	↗	4	...

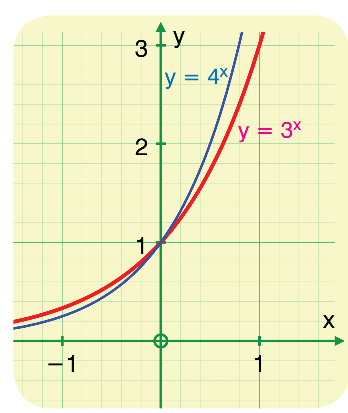
Yukarıdaki tabloda x değerleri artarken y değerlerinin de arttığı görülür.

2. Tablodaki (x, y) sıralı ikililerini koordinat düzleminde işaretleyelim.

3. İşaretlediğimiz bu noktalardan geçen $y = 2^x$ fonksiyonunun grafiği aşağıda çizilmiştir.



Örnek .. 2



Yukarıda grafik çizme özelliği olan bir dinamik matematik yazılımı yardımı ile çizilen $y = 3^x$ ve $y = 4^x$ in grafiği verilmiştir.

Bu grafiklere ait özellikleri inceleyelim:

- Her $x \in \mathbb{R}$ için,

  $y = 3^x > 0$, $y = 4^x > 0$ dır.

- Tanım kümesinden seçilen farklı x değerleri arttıkça bu değerlerin görüntüleri de artıyorsa fonksiyona artan fonksiyon denir. Bu iki grafikte de x değerleri büyüdükçe, y değerleri de büyümektedir. O hâlde, $f(x) = 3^x$, $f(x) = 4^x$ fonksiyonu artandır.
- x e verilen farklı değerlerin fonksiyondaki görüntüleri farklıdır. O hâlde, $f(x) = 3^x$, $f(x) = 4^x$ fonksiyonu bire birdir.
- Her $y \in \mathbb{R}^+$ için, $3^x = y$, $4^x = y$ eşitliklerini sağlayan bir x değeri vardır.

  O hâlde, $f(x) = 3^x$, $f(x) = 4^x$ örtendir.

Yukarıdaki sonuçlar;

$a > 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$

için de geçerlidir.

Örnek .. 3

$\mathbb{R}$ de tanımlı,

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

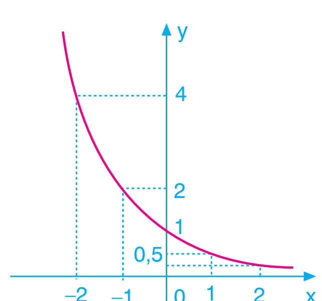
Çözüm

1. Uygun aralıkta bazı x reel sayıları seçilerek, eğri üzerindeki bazı ikililer aşağıdaki tablo ile oluşturulur.

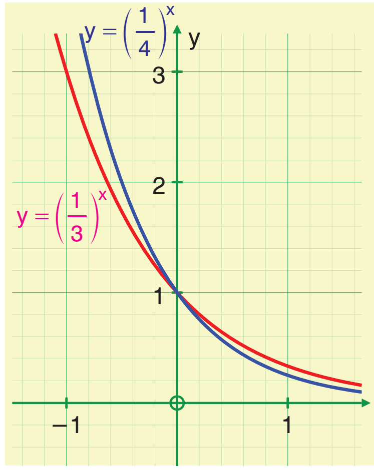
x	...	↗	–1	↗	0	↗	1	↗	2	...
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	...	↘	2	↘	1	↘	0,5	↘	0,25	...

Yukarıdaki tabloda x değerleri artarken y değerlerinin azaldığı görülür.

2. Tablodaki (x, y) sıralı ikililerini koordinat düzleminde işaretleyelim.
3. İşaretlediğimiz bu noktaları uygun şekilde birleştirdiğimizde $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çizmiş oluruz.



Örnek .. 4



Yanda, grafik çizme özelliği olan bir dinamik matematik yazılımı yardımı ile çizilen grafiklere ait özellikleri inceleyelim:

- Her $x \in \mathbb{R}$ için, $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$, $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 0$ dır.
- Tanım kümesinden seçilen farklı x değerleri arttıkça bu değerlerin görüntüleri azalıyorsa fonksiyona azalan fonksiyon denmektedir.

  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ fonksiyonlarında x değerleri büyüdükçe, y değerleri küçülmektedir. O hâlde bu iki fonksiyon da azalan bir fonksiyondur.
- Bu fonksiyonlarda x e verilen farklı değerlerin fonksiyondaki görüntüleri de farklıdır. O hâlde, bu fonksiyonların ikisi de bire birdir.
- Her $y \in \mathbb{R}^+$ için, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = y$, $\left(\frac{1}{4}\right)^x = y$ eşitliklerini sağlayan bir x değeri vardır. O halde, bu fonksiyonlar örtendir.

Yukarıdaki sonuçlar;

$0 < a < 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$

için de geçerlidir.

BEST BİLGİ

Özetleyecek olursak;

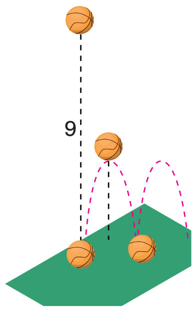
$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$,

$f(x) = a^x$

fonksiyonu:

- $a > 1$ için artan
- $0 < a < 1$ için azalandır.
- Bire bir ve örtendir.

1. 

Bir top 9 metre yükseklikten bırakılıyor. Top yere her çarpışında bir önceki düştüğü yüksekliğin $\frac{1}{10}$ u kadar yükseliyor.

Bu top n. kere yere çarptığı anda dikey olarak toplam kaç metre hareket etmiştir?

A) $11 - 2 \cdot 10^{-n}$ B) $11 - 2 \cdot 10^{1-n}$

C) $11 - 5 \cdot 10^{1-n}$ D) $11 - 3 \cdot 10^{1-n}$

E) $13 - 3 \cdot 10^{1-n}$

2. Bir (a_n) dizisinin terimleri arasında

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{(a_{n+1})^2}{a_n}$$

bağıntısı vardır.

$a_1 = 1$ ve $a_2 = 1$ olduğuna göre, a_{10} kaçtır?

A) 10 B) 100 C) 1000 D) 9! E) 10!

3.

$$(a_n) = (-n^2 + 6n - 5)$$

olduğuna göre, (a_n) dizisinin <u>en büyük</u> terimi kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

4.

$$(a_n) = \left(\frac{n^2 - 9n + 14}{3n - 14}\right)$$

dizisinin kaç terimi negatiftir?

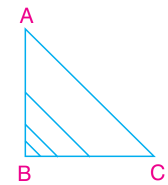
A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

5. Genel terimi,

$$a_n = (x + 3) \cdot n^2 + (3x - y + 6) \cdot n + x + y$$

olan dizi sabit dizi belirttiğine göre, a_2 kaçtır?

A) –8 B) –6 C) –2 D) 1 E) 3

6. 

Şekildeki ABC ikizkenar dik üçgeninin dik kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden yeni ikizkenar dik üçgen çiziliyor. Çizilen bu ikizkenar dik üçgenin dik kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden yeni ikizkenar dik üçgen çiziliyor. Bu şekilde devam edilerek iç içe n tane ikizkenar dik üçgen oluşturuluyor.

$|AB| = 6$ birim olduğuna göre, ABC üçgeni dahil oluşturulan bu n tane üçgenin alanları toplamı kaç birimkaredir?

A) $24 - 3 \cdot 2^{3-2n}$ B) $24 - 5 \cdot 2^{3-2n}$

C) $12 - 2 \cdot 3^{3-2n}$ D) $12 - 3 \cdot 2^{3-2n}$

E) $18 - 2 \cdot 3^{3-2n}$

7. Genel terimi,

$$a_n = \frac{(n+1)!}{2^{n+2}}$$

olan dizinin, 6. terimi 4. teriminin kaç katıdır?

A) $\frac{21}{2}$ B) 10 C) $\frac{19}{2}$ D) 9 E) $\frac{17}{2}$

8.

$$(a_n) = \left(\frac{1}{n^2 + 9n + 20}\right)$$

dizisinin ilk 10 teriminin toplamı kaçtır?

A) $\frac{1}{15}$ B) $\frac{2}{15}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{4}{15}$ E) $\frac{1}{3}$

9.

$$(a_n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

olduğuna göre, a_3 kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{7}{8}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

10. Bir geometrik dizinin ardışık üç terimi sırasıyla

$a - b, \quad 2, \quad b + a - 1$ dir.

Bir aritmetik dizinin ardışık üç terimi sırasıyla,

$2b + 2, \quad 8, \quad 2a + 2$

olduğuna göre, $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) $\frac{29}{4}$ B) $\frac{29}{3}$ C) 6 D) $\frac{141}{15}$ E) $\frac{221}{25}$

11. 2 ve 18 sayıları arasına yedi tane terim yerleştirildiğinde; ilk terimi 2, son terimi 18 olan sonlu bir aritmetik dizi elde ediliyor.

Buna göre, elde edilen dizinin ortak farkı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. (a_n) aritmetik dizisinde; $t > s$ olmak üzere,

$a_t - a_s = t^2 - 2ts + s^2$

olduğuna göre, dizinin ortak farkının t ve s türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $t - s$ B) $s - t$ C) $t + s$ D) ts E) $(t - s)^2$

13. (a_n), bir geometrik dizidir. Bu dizinin ilk n teriminin toplamı S_n olmak üzere,

$$\frac{S_6}{S_3} = 28$$

olduğuna göre, bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?

A) $3\sqrt{3}$ B) 3 C) $\sqrt{3}$ D) 1 E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

14. Bir (a_n) geometrik dizisinde,

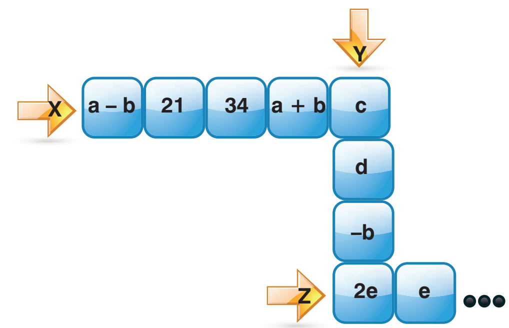
$a_5 = \log_2 25$

$a_9 = \log_5 2$

olduğuna göre, a_7 aşağıdakilerden hangisine eşit <u>olabilir</u>?

A) 4 B) $2\sqrt{2}$ C) 2 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\sqrt{2}$

15. Ayşen Öğretmen, Fibonacci dizisi, aritmetik dizi ve geometrik diziyi öğrencilerine kavratmak için aşağıdaki düzeneği hazırlamıştır.



- Düzenekte sadece tam sayıları kullanmıştır.
- X ile gösterdiği satırda ardışık beş Fibonacci sayısı, Y ile gösterdiği sütunda bir aritmetik dizinin ardışık dört terimi vardır.
- Z ile gösterdiği satırda sonlu bir geometrik dizinin ardışık ilk iki terimi vardır.

Buna göre,

I. Aritmetik dizinin ortak farkı –55'tir.

II. Geometrik dizi 3 elemanlıdır.

III. Ayşen Öğretmen'in, dizilerin terimleri için kullandığı sayılardan altısı pozitiftir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) I ve III C) II ve III D) Hiçbiri E) I, II ve III

16. Bir (a_n) aritmetik dizisinde ilk n terim toplamı S_n dir.

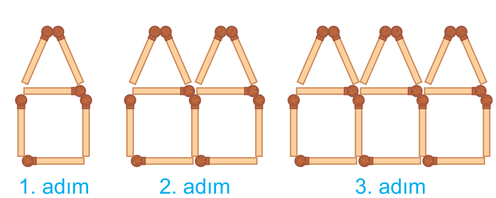
$S_{11} = 1$

$a_1 + a_{23} = 2$

olduğuna göre, S_{12} kaçtır?

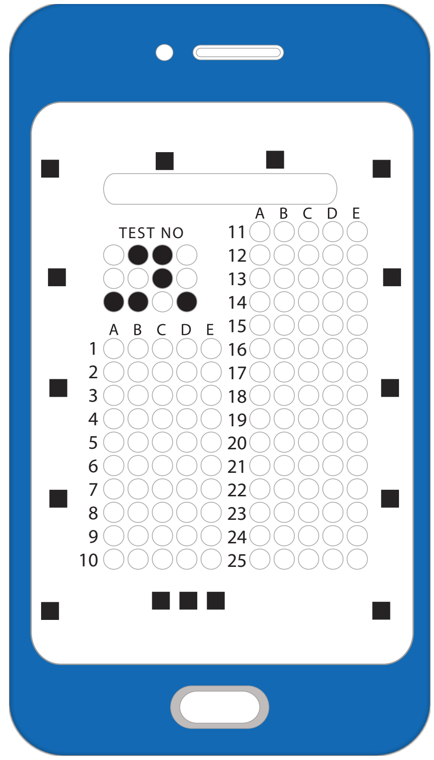
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

17. Aşağıdaki şekilde kibrit çöpleri ile oluşturulan bir örüntünün ilk üç adımı verilmiştir.



Buna göre, bu örüntünün en az kaçıncı adımındaki kibrit çöpü sayısı 100'den fazladır?

A) 18 B) 20 C) 26 D) 30 E) 32



3. Basamak Kontrol Testi Optiği

3. BASAMAK CEVAP ANAHTARI

Test 1	1-D	2-E	3-D	4-B	5-A	6-A	7-D	8-D
	9-D	10-E	11-C	12-C	13-D	14-E	15-D	16-C

Test 2	1-C	2-B	3-C	4-D	5-A	6-C	7-D	8-D
	9-A	10-A	11-D	12-E	13-B	14-B	15-A	16-C

Test 3	1-B	2-B	3-B	4-B	5-C	6-E	7-E	8-C
	9-A	10-C	11-A	12-E	13-E	14-B	15-E	16-C

Test 4	1-C	2-B	3-D	4-B	5-C	6-B	7-D	8-E
	9-D	10-B	11-A	12-B	13-C	14-B	15-B	16-C

Test 5	1-B	2-B	3-B	4-D	5-D	6-B	7-A	8-D

Test 6	1-C	2-B	3-C	4-B	5-D	6-D	7-E	8-B	9-A

BKT	1-B	2-D	3-C	4-C	5-B	6-A	7-A	8-B	9-C
	10-E	11-B	12-A	13-B	14-E	15-E	16-A	17-B	

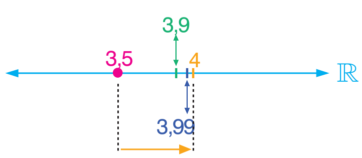
Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, soldan limit ve sağdan limit kavramlarını işleyeceğiz.

Limit kavramı bir bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yaklaşmasından hareketle, tablo ve grafikler yardımıyla açıklayacağız.

SOLDAN YAKLAŞMA

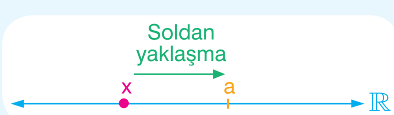
x
3,5
3,8
3,9
3,99
3,999
...
$x \to 4^-$

Yandaki tabloda, x değişkeni artan değerler alarak 4 e yaklaşmaktadır. Bu yaklaşım aşağıdaki sayı doğrusunda gösterilmiştir.



x in 4 ten küçük ve artan değerler alarak 4 e yaklaşması, x in 4 e soldan yaklaşması olarak adlandırılır ve $x \to 4^-$ biçiminde gösterilir.

x değişkeni a ya, a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa, bu tür yaklaşmaya **soldan yaklaşma** denir. Bu durum $x \to a^-$ biçiminde gösterilir.



Örnek .. 1

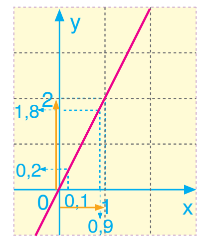
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2x$

olmak üzere, x değişkeni 1 e soldan yaklaşan değerler alırken f(x) in hangi sayıya yaklaşacağını bulalım.

Çözüm

	→				
x	0	0,1	0,9	0,99	...	1
y = f(x)	0	0,2	1,8	1,98	...	2



Verilen tabloda görüldüğü üzere, y = f(x) fonksiyonunda x değişkeni, 1 e soldan yaklaşan değerler alırken f(x) de 2 ye yaklaşan değerler alıyor. Bu durum yandaki grafikte de görülmektedir.

BEST BİLGİ

x değişkeni, a ya soldan yaklaşıyorken y = f(x) in değeri b ye yaklaşıyor ise, f(x) in x = a daki soldan limiti b dir.

Bu durum aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

Örnek .. 2

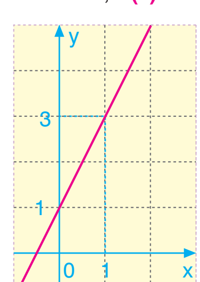
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ olmak üzere, x değişkeni 1 e soldan yaklaşan değerler alırken f(x) in 2 ye yaklaştığını gösterdik.

Bu durumda,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2 \text{ dir.}$$

Örnek .. 3

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **$f(x) = 2x + 1$** in grafiği aşağıda verilmiştir.



$f(x) = 2x + 1$ olmak üzere, x değişkeni 1 e soldan yaklaşan değerler alırken y = f(x) in değeri 3 e yaklaşır.

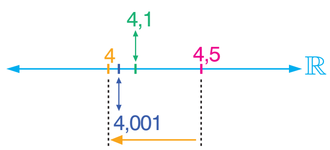
Bu durumda,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x + 1) = 3 \text{ tür.}$$

SAĞDAN YAKLAŞMA

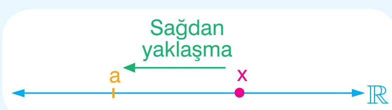
x
4,5
4,2
4,1
4,01
4,001
...
$x \to 4^+$

Yandaki tabloda, x değişkeni azalan değerler alarak 4 e yaklaşmaktadır. Bu yaklaşım aşağıdaki sayı doğrusunda gösterilmiştir.



x in 4 ten büyük ve azalan değerler alarak 4 e yaklaşması, x in 4 e sağdan yaklaşması olarak adlandırılır ve $x \to 4^+$ biçiminde gösterilir.

x değişkeni a ya, a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa, bu tür yaklaşmaya **sağdan yaklaşma** denir. Bu durum $x \to a^+$ biçiminde gösterilir.



Örnek .. 4

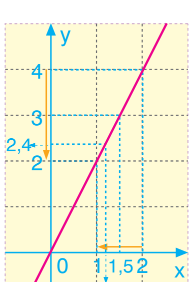
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2x$

olmak üzere, x değişkeni 1 e sağdan yaklaşan değerler alırken f(x) in hangi sayıya yaklaşacağını bulalım.

Çözüm

	←					
x	1	...	1,01	1,2	1,5	2
y = f(x)	2	...	2,02	2,4	3	4



Yukarıdaki tabloda görüldüğü üzere,

y = f(x) fonksiyonunda x değişkeni, 1 e sağdan yaklaşan değerler alırken f(x) de 2 ye yaklaşan değerler alıyor. Bu durum yandaki grafikte de görülmektedir.

x değişkeni, a ya sağdan yaklaşıyorken y = f(x) in değeri b ye yaklaşıyor ise, f(x) in x = a daki sağdan limiti b dir. Bu durum aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

Örnek .. 5

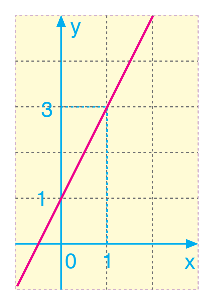
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **$f(x) = 2x$** olmak üzere, x değişkeni 1 e sağdan yaklaşan değerler alırken f(x) in 2 ye yaklaştığını gösterdik.

Bu durumda,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x = 2 \text{ dir.}$$

Örnek .. 6

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **$f(x) = 2x + 1$** in grafiği aşağıda verilmiştir.



$f(x) = 2x + 1$ olmak üzere, x değişkeni 1 e sağdan yaklaşan değerler alırken y = f(x) in değeri 3 e yaklaşır.

Bu durumda,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3 \text{ tür.}$$

f(x) fonksiyonunun x = a daki soldan limiti sağdan limitine eşit ise fonksiyonun x = a da limiti vardır.

x = a daki sağ limit ve sol limit değeri, fonksiyonun x = a daki limitidir.

f(x) fonksiyonunun x = a daki soldan limiti sağdan limitine eşit değil ise fonksiyonun x = a da limiti yoktur.

SÜREKLİLİK

Süreklilik konusu, limit ile ilintilidir. Bu nedenle bu konuya başlamadan önce limit ile ilgili bilgileri gözden geçiriniz. Sürekli fonksiyonları ve bunların grafiklerini bu bölümde inceleyeceğiz.

BEST BİLGİ

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ ise}$$

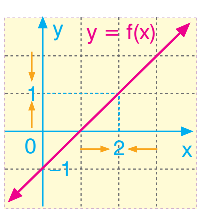
f(x) fonksiyonu (a, f(a)) noktasında süreklidir.

Buna göre, $y = f(x)$ fonksiyonu apsisi a olan noktada sürekli ise $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ dır.

f(x) fonksiyonu apsisi a olan noktada sürekli değil ise fonksiyon o noktada süreksizdir.

Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A üzerinde süreklidir denir.

Örnek .. 1



$f(x) = x - 1$

$f(2) = 2 - 1 = 1$ dir.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \text{ dir.}$$

Fonksiyonun $x = 2$ için değeri (yani f(2)), limit değerine eşit olduğu için $f(x) = x - 1$ fonksiyonu $x = 2$ de süreklidir.

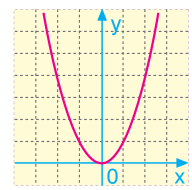
$f(x) = x - 1$ fonksiyonu x in bütün reel değerleri için yukarıdaki koşulu sağlar. Yani her nokta için, fonksiyonun aldığı değer limit değerine eşittir.

Bunun için, $f(x) = x - 1$ fonksiyonu x in bütün reel değerleri için süreklidir.

Örnek .. 2

Reel sayılarda $f(x) = x^2$ parabolünün sürekliliğini inceleyelim.

Çözüm



Yukarıdaki şekilde grafiği verilen $f(x) = x^2$ parabolü her x reel sayısı için süreklidir.

$f(x) = x^2$ bir polinom fonksiyonudur.

Bir fonksiyonun polinom olması için gerekli koşulu hatırlayınız.

BEST BİLGİ

$y = f(x)$ polinom fonksiyonu ise

$y = f(x)$ fonksiyonu reel sayılarda süreklidir.

a bir reel sayı olmak üzere,

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ dır.

Örnek .. 3

$f(x) = x^2 + 2x - 1$

fonksiyonunun $x = 3$ teki limiti kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 14 E) 15

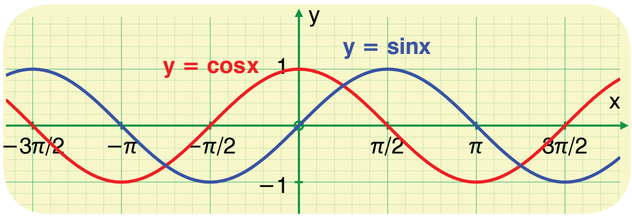
Çözüm

Verilen bir polinom fonksiyonu olduğundan

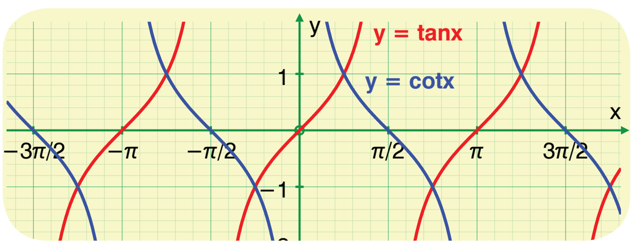
$f(x) = x^2 + 2x - 1$ her $x \in \mathbb{R}$ için sürekli ve

$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 1 = 14$ tür.

Cevap D



Yukarıda grafiği verilen **y = sinx** ve **y = cosx** fonksiyonları gerçel sayılar kümesinde süreklidir.



Yukarıda grafiği verilen **y = tanx** in sürekli olduğu en geniş küme,

$$\mathbb{R}-\left\{x : x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Yukarıda grafiği verilen **y = cotx** in sürekli olduğu en geniş küme

$$\mathbb{R}-\{x : x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

Örnek .. 11

$$f(x)=\frac{4\cos x}{\cos x-\sin x}$$

olduğuna göre, f nin sürekli olduğu en geniş kümeyi bulalım.

Çözüm

$\cos x - \sin x = 0$ olduğunda f nin paydası sıfır olur. Buna göre, f bu koşulları sağlayan sayılar için süreksizdir.

$\cos x - \sin x = 0$ ise $\cos x = \sin x$ ise $x = 45° + k \cdot 180°$ dir.

Buna göre, f nin sürekli olduğu en geniş küme

$\mathbb{R} - \{x : x = 45° + k \cdot 180,\ k \in \mathbb{Z}\}$ dir.

Örnek .. 12

ÖSYM sorusu

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\le 1 \text{ ise}\\ x^2+ax+b, & 1<x<3 \text{ ise}\\ 5, & x\ge 3 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu gerçel sayılar kümesinde sürekli olduğuna göre, a – b farkı kaçtır?

A) –4 B) –1 C) 2 D) 3 E) 5

Çözüm

Verilen fonksiyonun kritik noktalarının apsisleri

$x = 1$ ile $x = 3$ tür.

f fonksiyonu gerçel sayılar kümesinde sürekli olduğuna göre, bu kritik noktalar için de süreklidir.

Önce $x = 1$ için tanımı uygulayalım, sonra da $x = 3$ için tanımı uygulayalım:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ ise,

$\lim\limits_{x\to 1^-} (1) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+ax+b) = 1$

$1 = (1^2 + a\cdot 1 + b) = 1$

$a + b = 0$ ise $b = -a$ dır. ...(✰)

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$ ise

$\lim\limits_{x\to 3^-} (x^2+ax+b) = \lim\limits_{x\to 3^+} (5) = 5$

$3^2 + a\cdot 3 + b = 5$

$3a + b = -4$ tür. ...(✰✰)

(✰) ile (✰✰) dan ($b = -a$ ve $3a + b = -4$) ise

$a = -2,\ b = 2$ dir.

Buna göre, $a - b = -2 - 2 = -4$ tür.

Cevap A

Örnek .. 13

$$f(x)=\begin{cases}2x-5, & x<2 \text{ ise}\\ \dfrac{1}{x-3}, & 2\le x<4 \text{ ise}\\ x+1, & x\ge 4 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaların apsisleri toplamı kaçtır?

Çözüm

Parçalı fonksiyonun kritik noktalarının apsisleri (fonksiyonun alt aralıklarının uç noktalarının apsisleri) $x = 2$ ve $x = 4$ tür. Öncelikle bunları inceleyelim.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2x-5) = 2\cdot 2 - 5 = -1,$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{2-3} = -1$ ve

$f(2) = \dfrac{1}{2-3} = -1$ ise

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Hız ölçüm aygıtları, bir çeşit sürekli dalga radarlarıdır. Aracın anlık yer değiştirmesinin zamandaki değişim oranını çok kısa bir zamanda belirleyerek anlık hızı bulurlar. Bunun gibi iki değişkenin değişim oranı ve bu oranın anlık olarak belirlenmesi, matematiğin vazgeçilmez bir alanıdır.

TÜREVİN FİZİKSEL ANLAMI

Bu konuyla ilgili örneklerin bir kısmını bu bölümde diğer bir kısmına da integralin uygulamalarında değineceğiz.

Bir hareketlinin t saatte kaç km yol aldığı, s(t) fonksiyonu ile verilsin.

- Bu hareketlinin $[t_1, t_2]$ zaman aralığındaki ortalama hızı,

$$V_{ort} = \frac{\text{alınan yol}}{\text{geçen zaman}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \text{ dir.}$$

- Hareketlinin t. saatteki anlık hızı, $h \to 0$ için $[t, t + h]$ aralığındaki ortalama hızının limiti yani,

$$\text{anlık hız} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{(t+h) - t} = s'(t) \text{ dir.}$$

- Hareketlinin t anındaki hızı, $v(t) = s'(t)$ ve

  t anındaki ivmesi $a(t) = v'(t) = s''(t)$ olur.

Diğer bir ifadeyle, yol fonksiyonunun birinci türevi anlık hızı; ikinci türevi (hızın türevi) ivmeyi verir.

Örnek .. 1

Bir hareketlinin t saniyede aldığı yol, $s = f(t) = t^2 - 3t + 6$ (metre) fonksiyonu ile modelleniyor.

Buna göre;

a. Hareketlinin 8 saniyede aldığı yolu bulalım.

b. Bu hareketlinin, kaçıncı saniyede ortalama hızının 7 m/sn olduğunu bulalım.

Çözüm

a.

Hareketlinin 8 sn de aldığı yol,

$t = 8$ için $s = f(8) = 8^2 - 3 \cdot 8 + 6 = 46$ m dir.

b.

$f'(t) = V(t)$ anlık ortalama hızı verir.

$f'(t) = V(t) = 2t - 3 = 7$ ise $t = 5$ olur.

Buna göre, 5. sn de anlık ortalama hız 7 m/sn olur.

Örnek .. 2

Yol denklemi

$s(t) = 5t^2 + t + 8$

olan bir hareketlinin $t = 2$ saniye sonundaki hızını ve ivmesini bulalım.

Çözüm

$s(t) = 5t^2 + t + 8$

$s'(t) = 10t + 1$

$s'(2) = 10 \cdot 2 + 1$

$= 21$ dir.... (☆)

$s''(t) = 10$

$s''(2) = 10$ dur.... (☆☆)

Buna göre, $t = 2$ saniye sonundaki hız 21 ve ivme 10 dur.

İvme fonksiyonu (ikinci türev) nun sabit oluşundan, hareketin sabit ivmeli olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Örnek .. 3

Bir hareketlinin hızı, geçen zamanın küpüyle doğru orantılıdır.

Hareketli 5 saniye sonra 250 m/sn hıza ulaştığına göre, bu andaki ivmesi kaç m/sn² dir?

A) 50 B) 100 C) 120 D) 150 E) 250

Çözüm

Hareketlinin hızı v, geçen süre t olsun.

Bir hareketlinin hızı, geçen zamanın küpüyle doğru orantılı olduğuna göre, k orantı sabiti olmak üzere,

$v = k \cdot t^3$ olur.

$t = 5$ için $v = 250$ olduğuna göre,

$250 = k \cdot t^3$ ise $k = 2$ dir.

Buna göre,

Çözüm

Küpün bir kenarının uzunluğu a cm ve hacmi H olsun.

Verilenlere göre,

$a = 10$ ... (✰)

$\frac{da}{dt} = 0,02$ ... (✰✰)

olduğu veriliyor.

$\frac{dH}{dt}$ isteniyor.

$H = a^3$ olduğuna göre, $\frac{dH}{da} = 3 \cdot a^2$ olur.

Buna göre,

$$\frac{dH}{da} = 3 \cdot a^2 \text{ ise } dH = 3 \cdot a^2 \cdot da$$

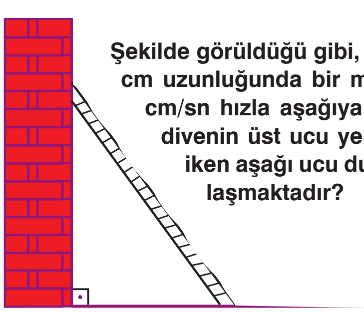
$$\text{ise } \frac{dH}{dt} = 3 \cdot a^2 \cdot \frac{da}{dt}$$

$$\text{ise } \frac{dH}{dt} = 3 \cdot 10^2 \cdot 0,02$$

$$\text{ise } \frac{dH}{dt} = 6 \text{ cm}^3/\text{sn olur.}$$

Cevap B

Örnek .. 7



Şekilde görüldüğü gibi, dik bir duvara dayalı 260 cm uzunluğunda bir merdivenin yukarı ucu 20 cm/sn hızla aşağıya kaymağa başlıyor. Merdivenin üst ucu yerden 240 cm yükseklikte iken aşağı ucu duvardan hangi hızla uzaklaşmaktadır?

Çözüm

Merdivenin üst ucunun yerden yüksekliği x, alt ucunun duvara uzaklığı y ile gösterilsin. x in zamana göre değişim oranı verilmiş, x = 240 iken y nin değişim oranı isteniyor. Merdivenin yukarı ucu 20 cm/sn hızla aşağıya kaydığına göre,

$$\frac{dx}{dt} = -20 \text{ cm/sn ve } \frac{dy}{dt} = ?$$

Merdivenin uzunluğu 260 cm olduğundan, şekildeki dik üçgenden, $x^2 + y^2 = 260^2$ ve $x = 240$ ise $y = 100$ dür.

$$x^2 + y^2 = 260^2 \text{ ise } y = \sqrt{260^2 - x^2}, \quad (y > 0)$$

$$\text{ise } y' = \frac{-2x}{2\sqrt{260^2 - x^2}}$$

$$\text{ise } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{260^2 - x^2}}$$

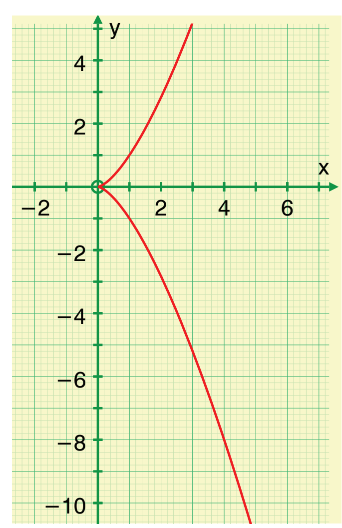
$$\text{ise } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=240} = -\frac{12}{5} \text{ tir.}$$

Türevde zincir kuralına göre,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \left(-\frac{12}{5}\right) \cdot (-20) = 48 \text{ cm/sn}$$

olduğuna göre, merdivenin aşağı ucu duvardan saniyede 48 cm hızla uzaklaşmaktadır.

Örnek .. 8



$y^2 = x^3$ ün grafiği şekilde verilmiştir. Bu grafik üzerinde bir nokta hareket etmektedir.

Nokta (4,–8) konumunda iken x-koordinatı dakikada 2 birim artmaktadır.

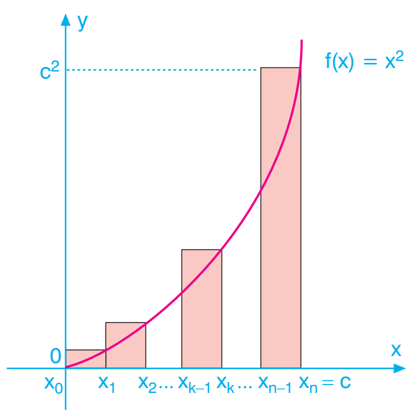
O hâlde noktanın y-koordinatı hangi hızla değişmektedir?

Çözüm

Noktanın herhangi bir andaki koordinatları, x ve y, $y^2 = x^3$ bağıntısını sağlamakta ve zamana göre değişmektedir.

RİEMANN (RİMAN) İNTEGRALİ

Aşağıda verilen şekilde, $f(x) = x^2$ eğrisi, x ekseni ve $x = c$ doğrusu ile sınırlanan alan, alt alanlara bölünmüştür.



x ekseni ve $x = c$ doğrusu arasında kalan $f(x) = x^2$ eğrisi,

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = c$$

olmak üzere, $\forall\, k \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ için, $[x_{k-1}, x_k]$ biçiminde n tane kapalı alt alana bölünmüştür.

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

$$f(x) = x^2$$

$$t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

olmak üzere, bu alanların toplamı, $\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$ biçiminde yazılabilir. Bu toplama Riemann (Riman) toplamı denir. Buradan,

$$n \to \infty,\ (\Delta x_k \to 0) \text{ için } \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$$

toplamının limiti, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k = \int_0^c f(x)\,dx$ biçiminde gösterilir.

Genel olarak eğer f(x) fonksiyonu [a, b] aralığında türevli ve her $x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $y = f(x)$ eğrisi ve [a, b] aralığında kalan alan,

$$A = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

biçiminde gösterilir. Buna f fonksiyonunun a dan b ye belirli integrali denir.

$\int_a^b f(x)\,dx$ gösteriminde, a ya "integralin alt sınırı", b ye de "integralin üst sınırı" denir.

[a, b] aralığı n tane eşit parçaya bölündüğünde $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$ dir.

f eğrisi, x ekseni ve $x = c$ doğrusu ile sınırlanan bölgede oluşan alt ve üst dikdörtgenlerin alanları toplamı aşağıdaki gibidir.

$$\text{Alt toplam} = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k$$

$$\text{Üst toplam} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k \text{ olur.}$$

Örnek .. 1

$f(x) = 2x^2$ eğrisi, x ekseni ve $x = 5$ doğrusu ile sınırlanan alanı, alt ve üst dikdörtgensel bölgelerin alanları toplamı yardımıyla hesaplayalım.

Çözüm

[0, 5] aralığı n eşit parçaya bölünürse, her bir alt kapalı aralığın uzunluğu $\dfrac{5-0}{n} = \dfrac{5}{n}$ olur.

Bu durumda, alt toplam aşağıda bir kısmı gösterilen dikdörtgensel bölgeler olur.